Topología I
Examen II

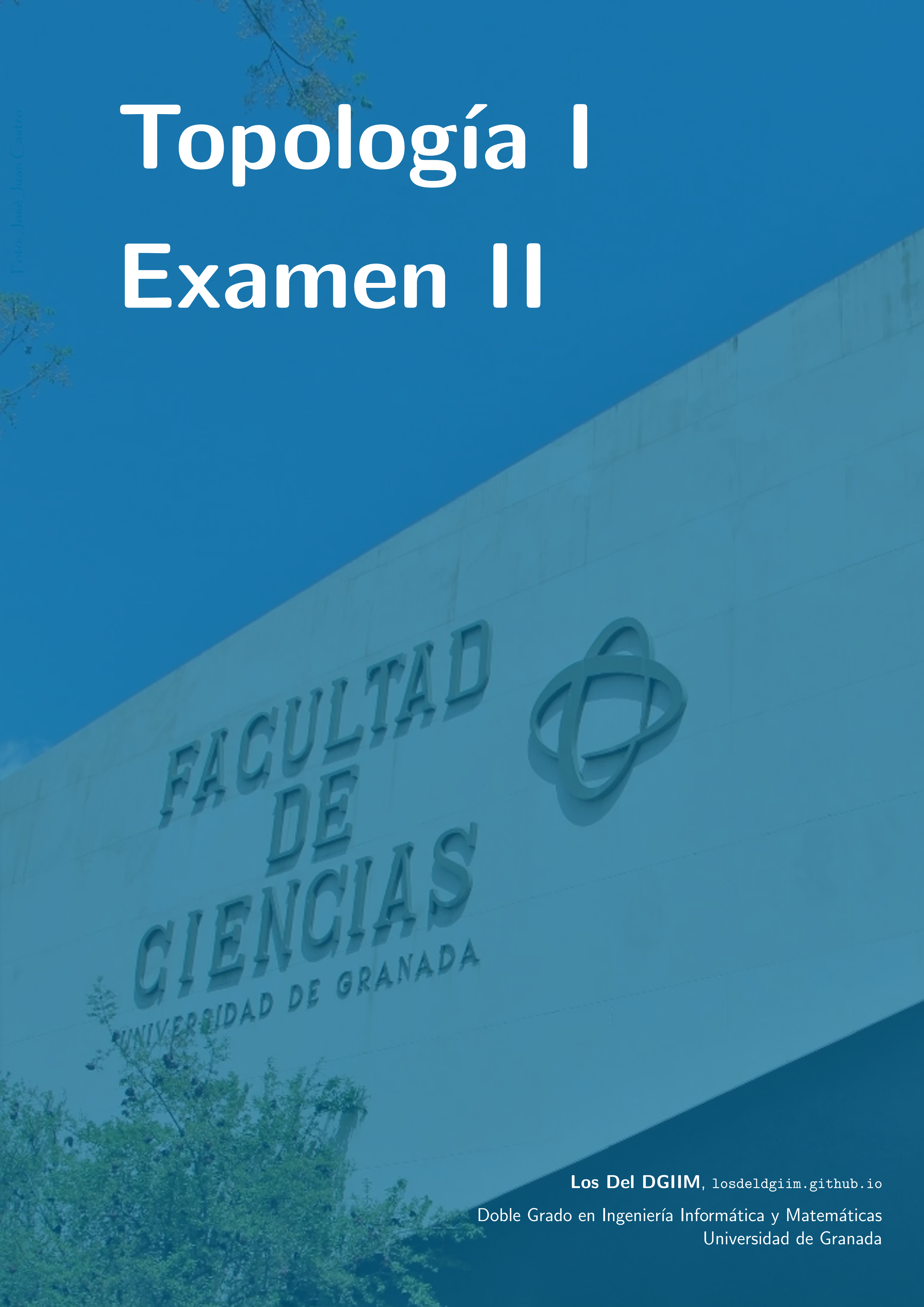

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Antonio Gálvez López.

Descripción Parcial del Tema 2.

Fecha 21 de diciembre de 2023.

Duración 60 minutos.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $f:(X,\mathcal{T})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)$ una aplicación abierta. Demostrar que la aplicación $g:X\to\mathbb{R}$ dada por la ecuación $g(x)=\|f(x)\|$ no alcanza su máximo en X; es decir, no existe $x_0\in X$ tal que $\|f(x_0)\|\geqslant\|f(x)\|$ para todo $x\in X$.

Como f es abierta y $X\in\mathcal{T}$, entonces $f(X)\in\mathcal{T}_u$. Por tanto, para todo $x\in X$ existe $r_x\in\mathbb{R}^+$ tal que $B(f(x),r_x)\subset f(X)$. Veamos que $f(x)+\dfrac{r_x}{2}\cdot\dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}\in f(X)$:

$$\left\|f(x)+\frac{r_x}{2}\cdot\frac{f(x)}{\|f(x)\|}-f(x)\right\|=\left\|\frac{r_x}{2}\cdot\frac{f(x)}{\|f(x)\|}\right\|=\frac{r_x}{2}<r_x$$

Por tanto, $f(x)+\dfrac{r_x}{2}\cdot\dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}\in B(f(x),r_x)\subset f(X)$. Por tanto, existe $x'\in X$ tal que $f(x')=f(x)+\dfrac{r_x}{2}\cdot\dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$. Veamos que $\|f(x')\|>\|f(x)\|$:

$$\begin{aligned}\|f(x')\|=\left\|f(x)+\frac{r_x}{2}\cdot\frac{f(x)}{\|f(x)\|}\right\|&=\left\|\left(1+\frac{r_x}{2}\cdot\frac{1}{\|f(x)\|}\right)\cdot f(x)\right\|=\\&=\left(1+\frac{r_x}{2}\cdot\frac{1}{\|f(x)\|}\right)\cdot\|f(x)\|>\|f(x)\|\end{aligned}$$

Por tanto, supongamos que existe $x_0\in X$ tal que $\|f(x_0)\|\geqslant\|f(x)\|$ para todo $x\in X$. Como hemos visto antes, existe $x_0'\in X$ tal que $\|f(x_0')\|>\|f(x_0)\|$, por lo que hemos llegado a una contradicción. Por tanto, no existe $x_0\in X$ tal que $\|f(x_0)\|\geqslant\|f(x)\|$ para todo $x\in X$, es decir, g no alcanza su máximo en X.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Sobre $\mathbb{S}^1\times[0,1]\subset\mathbb{R}^3$ se considera la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ siguiente:

$$(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z')\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}(x,y,z)=(x',y',z')\\ \vee\\ z=z'=0\end{array}\right.$$

Demuestra que la aplicación $F:\mathbb{S}^1\times[0,1]\to\overline{B}[(0,0),1]$ dada por

$$F(x,y,z)=z(x,y)$$

induce un homeomorfismo desde $(\mathbb{S}^1\times[0,1]/\mathcal{R},\mathcal{T}_u/\mathcal{R})$ en la bola cerrada unidad $\overline{B}[(0,0),1]\subset\mathbb{R}^2$ con su topología usual inducida.

En primer lugar, tenemos que F es continua, ya que $F(x,y,z)=z(x,y)=(zx,zy)$. Como ambas componentes son continuas, F es continua. Veamos ahora que es sobreyectiva. Sea $(x,y)\in\overline{B}[(0,0),1]$, es decir, $x^2+y^2=k$, con $k\in[0,1]$. Sea $x'=\frac{x}{\sqrt{k}}$, $y'=\frac{y}{\sqrt{k}}$ y $z'=\sqrt{k}$. Veamos que $(x',y',z)\in\mathbb{S}^1\times[0,1]$:

$$(x')^2+(y')^2=\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{k}=\frac{x^2+y^2}{k}=\frac{k}{k}=1\qquad\text{y}\qquad 0\leqslant z'=\sqrt{k}\leqslant 1$$

Veamos que $F(x',y',z')=(x,y)$:

$$F(x',y',z')=z'(x',y')=\sqrt{k}\left(\frac{x}{\sqrt{k}},\frac{y}{\sqrt{k}}\right)=(x,y)$$

Por tanto, hemos visto que F es sobreyectiva. Veamos ahora que es cerrada. Para ello, como $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ es cerrado y acotado y es subconjunto de $\mathbb{R}^3$, entonces es compacto. Por tanto, F es cerrada. Como F es continua, sobreyectiva y cerrada, entonces es una identificación. Veamos ahora que $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}$, es decir, que F identifica los puntos de $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ que están relacionados por $\mathcal{R}$.

Sean $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Veamos que:

$$(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z') \Longleftrightarrow F(x,y,z) = F(x',y',z')$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que $(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z')$. Entonces, $(x,y,z) = (x',y',z')$ o $z = z' = 0$. Si $(x,y,z) = (x',y',z')$, entonces $F(x,y,z) = F(x',y',z')$. Si $z = z' = 0$, entonces $F(x,y,z) = F(x',y',z') = 0$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $F(x,y,z) = F(x',y',z')$. Entonces, $z(x,y) = z'(x',y')$; es decir, $zx = z'x'$ y $zy = z'y'$.

- Supongamos $z = z' \neq 0$. Entonces, dividiendo entre z, tenemos que $x = x'$ y $y = y'$. Por tanto, $(x,y,z) = (x',y',z')$.
- Supongamos $z = z' = 0$. Entonces, $(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z')$ de forma directa.
- Supongamos $z \neq z'$. Veamos que este caso no es posible.
  Supongamos, sin pérdida de generalidad, $z \neq 0$. Tenemos $x = \frac{z'x'}{z}$ y $y = \frac{z'y'}{z}$. Por tanto,

  $$1 = x^2 + y^2 = \frac{(z')^2(x')^2}{z^2} + \frac{(z')^2(y')^2}{z^2} = \frac{(z')^2}{z^2}((x')^2 + (y')^2) = \frac{(z')^2}{z^2} = 1$$

  Por tanto, $(z')^2 = z^2$, con $z, z' \in [0,1]$. Por tanto, $z = z'$.

Por tanto, como F es una identificación y $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}$, entonces F induce un homeomorfismo desde $(\mathbb{S}^1 \times [0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$ en la bola cerrada unidad $\overline{B}[(0,0),1] \subset \mathbb{R}^2$ con su topología usual inducida, como queríamos demostrar.